飯田論文について

飯田論文について

電総研　近藤　淳

飯田氏が物質の電磁気学に対する新理論を発表され[1]，それについての意見を求められた。この飯田論文や同氏の著書「新電磁気学」[2] は，同氏が東大で電磁気学の講義を担当された機会に物質の電磁気学について考察を加え，新たに考え直した結果生れたものということである。これらは決していい加減なものではなく問題を深く考えられたことが伺われる。しかし飯田理論の最も顕著な結論は「古典電子ガスはマイスナー効果を示す」というものであり，これは従来の常識からあまりにかけ離れているために人々から殆んど問題にもされなかったようである。昔から Miss van Leeuwen の定理というものがあり，古典統計力学を適用すると外部磁場によって物質中に電流は誘起されないことになっているから，飯田理論は明らかにこの定理に違反する。それでは飯田理論のどこが誤っているのか。複雑な飯田論文のどこに誤りがあるのか見付けるのは困難な作業であったが，結局飯田氏の導入したT．E．原理というものが誤りの原因であるというのが私の得た結論である。T．E．原理を適用するとたしかに古典電子ガスのマイスナー効果が導かれるが，同時に熱力学の第二法則に違反することがいえる。第二法則に違反しないように一つの項を左辺から右辺に移すと Miss van Leeuwen の定理が得られるのである。

§ 1.　予備的考察

二つの同心リング C_1 と C_2 があり（C_2 を内側とする），夫々は内部に電子を含むとする。C_1 内の電子はリングに沿って流れて電流 I_1 を作るとする。マサツは十分小さいとすれば I_1 は定常であるとしてよい。更に C_2 内の電子も電流 I_2 を作ったとすると全系のエネルギーはどうなるだろうか。電子の運動エネルギーは夫々 I_1^2 と I_2^2 に比例する。残るは磁気エネルギーであって，I_1 の作る磁場を $\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{r})$，$I_2$ の作る磁場を $\boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{r})$ とすれば

$$(8\pi)^{-1}\int(\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2)^2\,dv \tag{1}$$

が磁気エネルギーである。$\boldsymbol{H}_1^2$ と $\boldsymbol{H}_2^2$ は夫々 I_1^2 と I_2^2 に比例する項を与えるから運動エネルギーにくりこんでおいてもよい（リングは十分細いとする。）クロスタームは次のように計算出来る。[2),3)]

$$(4\pi)^{-1}\int \boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{H}_2\,dv = c^{-1}\int \boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{j}_2\,dv$$
$$= c^{-1}\int \boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{j}_1\,dv \tag{2}$$

$\boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r})$ は夫々 I_1, I_2 の電流密度, $\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r})$ は夫々 I_1, I_2 の作るベクトルポテンシャルである。もし C_2 が十分小さくて I_1 の作る磁場 H_1 がその附近で一様なら(2)は

$$(I_2/c)\int \boldsymbol{A}_1\cdot d\ell_2 = (I_2/c)\int \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_1\cdot d\boldsymbol{S}_2$$
$$= I_2 S_2 H_1/c = +\mu_2 H_1 = (2\pi S_2/c^2 R)\,I_1 I_2 \tag{3}$$

と書ける。μ_2 は C_2 のもつ磁気能率。この相互作用エネルギーは I_1 と I_2 が逆符号のとき小さくなる。それは当然であって，両者の作る磁場が逆であれば中心附近で互に打消し，$(\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2)^2$ の積分値が小さくなるからである。全エネルギーは

$$\alpha I_1^2 + \beta I_2^2 + (2\pi S_2/c^2 R) I_1 I_2 \tag{4}$$

となる。そこで今 I_1 を一定とみなせば(4)を最小にする I_2 は

$$I_2 = -(\pi S_2 I_1/\beta c^2 R) \tag{5}$$

つまり外部磁場中におかれたリングには，（内側の）磁場を打消す方向に電流が流れた方がエネルギーが低くなる。それでは果してそのような電流が流れるだろうか。

我々が知っている事実は次のようである。今 I_1 を0から I_1 まで急に増したとする。すると電磁誘導によって C_2 には I_2 が流れ，その値は丁度(5)で与えられるものである。もし C_2 にはマサツがないとすれば，(5)の電流はいつまでも流れ続けるだろう。しかしマサツがあれば I_2 はやがて減衰し，0になってしまうだろう。事実はこのようであるが，しかしそうすると(5)の値の I_2 が流れ，(4)が最小であった状態から，(4)の値のより大きい状態へと移ったことになる。これはエネルギー極小が安定な状態という物理屋の生理的ともいえるセンスからみて多分にひっかかるものがあるし，ともかくその時増大

したエネルギーはどこから来たかという疑問が残る。

勿論電磁気学に精通した人ならば，この問題の正しい答を知っておられるだろうし，知らない人でも少し考えてみれば判ることである。しかし飯田氏は熱平衡状態において(5)の電流が流れるということを直観的に感じられたのではないかと想像する。C_2 がリングではなく円柱である場合には(5)に相当するものはロンドン方程式になることはすぐ判る。これが古典電子ガスがマイスナー効果を示すと主張する飯田理論の原始の形ではないかと想像する。現在の飯田理論はもっと複雑な形をしており，特に retardation（情報が有限の速さでしか伝わらないこと）を重要視する。それについて述べるのは後にして，まず上に述べたエネルギーに関する疑問に対する答を述べておこう。

簡単のため電子の弾性散乱によって I_2 が減衰したとしよう。つまり速度ベクトルが一方向に揃っていたのが，大きさを変えずにバラバラの向きになったとする。すると(4)の第二項が熱エネルギーになったのは明らかである。(4)の第三項は負の値から0に増大した。これはどこから来たか。I_2 が定常的に流れていた時にビオサバール則によって全空間に磁場 $\boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{r})$ があった。I_2 が0になると $\boldsymbol{H}_2=0$ の領域が光速度で外側に拡がって行く。その境界の所は横波の電磁波のようになっており，磁場も電場も存在する[4]。これが C_1 の場所を通る時，I_1 に対して仕事を行う（その値は正も負もありうる）。この仕事の値が丁度(4)の第三項の変化に等しいことを示すことが出来る。(Appendix I) ところが I_1 に対してなされた仕事は I_1 の運動エネルギー（(4)の第一項）の増加（又は減少）とならねばならぬ。結局 I_2 が0に減衰すると(4)の第二項が熱エネルギー（及び先程の電磁波が無限遠に持去るエネルギー）に変化し，第三項が増大するがその分だけ第一項が減小するということが起るのである。結局エントロピーが増大したのであるから少しも不思議はない。

ところが一方マイナスナー効果が起ると主張することは，はじめ $I_2=0$ であっても(5)の値の I_2 が流れ出すと主張することと同じである。そうすると(4)の第三項はたしかに減小するが，さっきと同様にしてその分だけ(4)の第一項が増加する。一方 C_2 の電子の乱雑な運動が速度の向きの揃った運動になって(4)の第二項が増加する。結局乱雑さが減ったのであって熱力学の第二法則に違反するのである。もし(4)の第三項の減少分が第一項に行かずに熱浴に吸いとられるとするならば事情は全く異なる。熱浴のエントロピーの増大が C_2 のエントロピーの減小を打消して余りある。このときは(4)の第二，三項

を最小にすることが熱平衡を与える。しかし事実はそうではないのである。この点は§3でもっと厳密に示すが，話の本筋は以上でお終まいである。

しかし飯田氏はここで retardation（光速有限）の重要性を指摘される。もし I_2 の変化が速かに起ったとすると，先程の電磁波が I_1 に仕事をするのは I_2 の変化が終了した後のことではないか。このように将来起るべきことが現在の I_2 の振舞に影響するだろうか，というのが飯田氏の問題提起である。I_2 の変化が終了した瞬間においては，(4)の第二項が熱エネルギーになったこと，(4)の第三項が負から0になったこと，ある電磁波が外側に向けて発射されたこと，この三つの事が起っている[5]。これらの量の間の関係だけから今考えた I_2 の変化が起るべきかどうか，一般に系が不可逆的にどの方向に進むべきなのかが決められるべきだというのが飯田氏の主張と思われる。そしてそれを決めるものが Transient Energy (T. E. と略す）原理だといわれる。

しかし果してそうだろうか。将来のことが現在に影響しないというのは正しい。しかし系が不可逆的にどこへ向って進行するかというクライテリオンはまた別のことである。将来そこへ移ればエントロピーが最大となるであろう状態へ向って現在の系が進行をはじめるのである。I_2 の変化に伴う電磁波が I_1 の運動エネルギーを変化させるだけなのか，熱浴に吸われてエントロピーを増大させるかは将来のことであるから現在の I_2 の振舞に影響しないとはいえない。将来エントロピーを増大させるならその方向に起るし，減少させるなら起らない。だからある定常状態から transient な過程を径て，別の定常状態への遷移が終了した時点において二つの状態のエントロピーを比較し，遷移の起る方向をきめればよい。 transient なことが起った瞬間をとらえて方向を決めるのはむずかしいし，熱平衡を論ずるのに必要もない。しかししばらくは飯田氏に歩調をあわせて，T. E. 原理というものを考察してみよう。

§2. 二，三の例

滑車の両側に同じ重さの重りをかけたとする。その平衡を論ずるために一方を仮想的に Δx だけ下げたとすると，その重りのポテンシャルエネルギーは下る。しかし同時に他の重りのポテンシャルエネルギーが上って合計は0である。この時 retardation を考えたらどうなるだろうか。重りを支える糸が弾性体であるとすると，一方を Δx だけ下げた時，同時に他方が上るのではない。重りのポテンシャルエネルギー $Mg\Delta x$ は糸の弾

性エネルギーとして糸に貯えられ，それが音速で他の重りに達し，そこでそれを引上げる。そこで，始めの重りの平衡を論ずるのに Δx だけ変位させた直後を考えると，重りのポテンシャルエネルギーが $Mg\Delta x$ だけ減ったことと，同じだけの[6]弾性エネルギーが外側に向けて放射されたことの二つのことが起っている。この二つのことだけから重りの平衡条件を決めようというのは，それはそれでよいかもしれない。しかしその結果は retardation を考えない場合と同じでなくてはならないことは直観的に明らかである。しかしT.E.原理を適用するとどのような結論になるだろうか。次にもう少し複雑な例を考えてT.E.原理を適用してみよう。

図１のように滑車の片側に重りを下げ，もう片側にピストンを逆につける。重りのポテンシャルエネルギーを U_1 ，気体の内部エネルギーを U_2 とする。熱浴から δQ の熱が気体に入ったとすると，エネルギー保存から

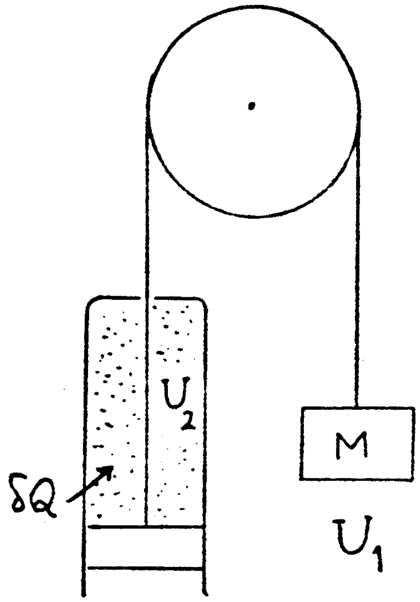

図　　1

$$-T\delta S_r = \delta Q = dU_1 + dU_2 \tag{6}$$

δS_r は熱浴のエントロピー変化。これから

$$T\delta(S_r + S_2) - pdV + dU_1 = 0 \tag{7}$$

が得られるが，重りとピストンが結ばれているから $dU_1 = (Mg/S)dV$ の関係があり

$$T\delta(S_r + S_2) = (p - Mg/S)dV \tag{8}$$

となるが，エントロピー増大から $p > Mg/S$ なら $dV > 0$ という当然の結果がえられる。

今この問題に retardation を考えてみよう。δSやdVの変化が速かに終了し，弾性エネルギーを貯えた弾性波が重りへ向って発射された瞬間を考えよう。このときU_1 はまだ変化していない。(7)に対応するエネルギー保存の式は

$$\delta W_1 + T\delta(S_r + S_2) - p\,dV = 0 \tag{9}$$

となる。ここにδW_1 は発射された弾性エネルギーであって当然$\delta W_1 = dU_1$ でなくてはならない。さて飯田理論ではδW_1とか，§1の電磁波のような空中をとんで行くエネルギー（正確には配位空間で系を指定することが出来ないような状態にあるときエネルギーバランスを受持っているエネルギーの形態）をT.E.と呼ぶ。そしてT.E.が発射される方向に系が進行するかどうかが

$$\mathrm{T.E.} + T\delta S \geqq 0 \tag{10}$$

で判定される。さて今の場合T.E. $= \delta W_1$ だから(9)より直ちに

$$p\,dV \geqq 0 \tag{11}$$

が系の進む方向を与える。これは勿論正しくない。糸を rigid であるとすれば(8)$\geqq 0$が答であるが，糸を弾性体として retardation を考えれば(11)が答であると主張する人はいないだろう。

ある transient な事が起った直後の情報だけでそれが不可逆過程として許される方向にあるかどうかを判定出来るものだろうか。今の例でδSやdVの変化が終了し，弾性エネルギーが発射された直後を考えよう。もしこの瞬間においてこれが許されるかどうか決るなら，それは糸の先がどうなっているかによらない筈である。滑車や重りがなく糸が単に固定してあるだけだと，弾性波は反射して戻り，ピストンのdVをもとへ戻すだろう。つまり一度発射されたT.E.は戻って来て再びU_2 の内部エネルギーとなる。そこまで考えて始めて系の進む方向が決るのではないか。次に糸の先端が両側から挟みつけてあるだけとする。挟む力をだんだん弱くして糸がずり落始めた直後を考える。このときT.E.を運ぶ波がやって来ると，それは反射されないで糸がずれるだろう。つまり弾性エネルギーは熱エネルギーとなってしまい，もはや帰ってこない。このときは系はずり落る一方であって(11)は正しい。次に図1の場合を考えればT.E.はもとへは戻

って来ないが重りの位置エネルギーとへ変化した。このように考えてくればT. E.原理が正しい答を与えるのは，T. E.が最後に熱エネルギーに変化する場合であるということがいえるのではないか。その場合にはT. E.も $T\delta S$ の形に書けるから(10)は全エントロピー増大ということになって確かに成立つ。

ここで§1の問題に帰ってみると，それが図1の問題と非常に類似であることに気付く。後者の場合，U_2 の変化が弾性波として運ばれて重りのポテンシャルエネルギーへと転化する．§1の場合，磁気的相互作用のエネルギー((4)の第三項)の変化が電磁波として C_1 まで運ばれそこで I_1 の運動エネルギーに転化する。どちらもT. E.が最後に熱にならずに配位空間で表わせるエネルギーに転化している。従ってT. E.原理(10)を適用するのはやめにして，(8)でやったようにある定常状態から別の定常状態への変化が完全に終了した後において両者のエントロピーを比較しその過程が起るかどうかを判定するという通常の熱力学の手法を用いることにしよう。

§3. 古典電子ガス

§1と同じく C_1 と C_2 の二つの電子ガスを考える。C_1 の方は§1と同じく磁場を作るために考えられたものである。C_1 の代りに非常に重い輪を考え，その上に動かない電荷を一様に分布させたものを回転させたと考えてもよい。輪が重く回転にマサツがないとすれば輪は定常的に回り続け磁場 H_1 を作るだろう。こうすると C_1 の自由度は一つになって簡単であるが，ここでは飯田氏にならって C_1 も電子ガスとしよう。C_2 の方はリングでなく円柱と考える。簡単のため電子密度は C_1 でも C_2 でも一様で且同一とし，n で表わす。飯田氏は電子の運動を全体としての drift とそれからのずれに分けて考える。ある点 r における drift velocity を $\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{r})$ とすると電流密度は $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = -ne\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{r})$ と表わされる。C_1 の電流密度を $\boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{r})$，$C_2$ の電流密度を $\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r})$ とする。($\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r})$) 飯田氏は全エネルギーを次のようにした。

$$U = U_{1\mathrm{D}} + U_{2\mathrm{D}} + U_{1\mathrm{T}} + U_{2\mathrm{T}} + U_{\mathrm{m}} \tag{12}$$

ここで

$$U_{1\mathrm{D}} + U_{2\mathrm{D}} = \int_{C_1+C_2} (m/2ne^2)\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})^2\, dV \tag{13}$$

は電子の集団としての流れの運動エネルギーである。（U_{1D} は積分を C_1 について行ったもの。以下同様）

$$U_{1T}+U_{2T}=\int_{C_1+C_2} nm(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_D)^2/2\,dV \tag{14}$$

は drift からのずれに対する運動エネルギーで，静止した電子ガスの内部エネルギーに対応する。U_m は $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ によって発生した磁場のエネルギーで(2)と同様にして

$$U_m=\int_{C_1+C_2}(2c)^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\,dV \tag{15}$$

と書表わされる。$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ によって生じたベクトルポテンシャルで，$\boldsymbol{j}_1$ による部分を $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{j}_2$ による部分を $\boldsymbol{A}_2$ とする。$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ を定めれば定まるから U_m は $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ の汎関数である。そうすると U のうち $U_{1D}+U_{2D}+U_m$ は $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ の汎関数である。これは G–L 的発想であって，磁性体のエネルギーを磁化 $M(\boldsymbol{r})$ の汎関数として表わしたようなものである。

さて問題は C_1 に $\boldsymbol{j}_1$ が流れていて C_2 の場所に磁場 H_1 が生じていたとき，熱平衡における $\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r})$ は何かというものである。熱平衡を問題にするのであるから C_2 は熱浴と接していると考えよう。熱浴との相互作用エネルギーは十分小さいとして全エネルギーはやはり(12)で表わされるが，しかし C_2 を平衡状態にもたらすように十分かき混ぜてくれるものと考える。輻射場とか，容器の壁とか，或は金属電子のように格子とかを考える。勿論以下の議論に熱浴が何であるかは関係ない。さて飯田氏はこの系の熱平衡を定めるのは T. E. 原理であるといわれる。我々はすでにのべたように正しい熱力学の手法を適用して両者を比較しよう。

今，ある $\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r})$ で表わされる定常状態にいたとする。熱揺動のためそれが $\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r})+\delta\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r})$ という定常状態に移ったとする。この両者を比較するためにどのようなエネルギー変化が起ったかを調べよう。まず U_{2D} が変化した。それを δU_{2D} とする。$\delta\boldsymbol{j}_2$ が生じたというのは電子の乱雑な運動が集団的な運動に変化した（或はその逆）のであるから U_{2T} も変化した（δU_{2T}）。またこの変化に際して熱浴から C_2 へ δQ の熱が流れ込んだとする。さて以上の変化が速かに終了したとすると残るは電磁場のエネルギーの変化である。$\delta\boldsymbol{j}_2$ の発生に伴って U_m の値が変化するがそれには retardation が伴う。その点も考慮にいれることにしよう。

U_m のうち C_2 のみによる部分

$$U_{m2} = (2c)^{-1} \int \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r})\, dV$$

は殆んど retardation を伴わず変化が終了する。その他の部分に関しては(15)は用いられない。(15)は定常な場合のみ成立つ。今はもともとの $\boldsymbol{H}^2$ の積分の式で考えなくてはならない。さて $\delta \boldsymbol{j}_2$ の build up が t_0 の時間で完了したとする。すると動径方向に ct_0 の巾をもった transient な領域が出来て，それが光速 c で外側へ拡がって行く。その外側には旧い磁場 $\boldsymbol{H}_2$ があり，内側には新しい磁場 $\boldsymbol{H}_2 + \delta \boldsymbol{H}_2$ がある。境界領域には電場も存在する。今 $\delta \boldsymbol{j}_2$ の変化が終了し U_{m2} の変化も殆んど終了した直後，境界領域がまだ C_2 の近くにある瞬間を考える。電磁場のエネルギー変化は，その時における $\boldsymbol{H}^2$ と $\boldsymbol{E}^2$ を全空間で積分して 8π で割った値から最初の同様の値（これは(15)を用いてよい）を引いたものである。これを $\delta U_{EM} + \delta U_{m2}$ とする。この瞬間におけるエネルギー保存から

$$\delta Q = \delta U_{2D} + \delta U_{2T} + \delta U_{EM} + \delta U_{m2} \tag{16}$$

が成立たねばならぬ。少し時間がたつと境界領域が C_1 を通過しその際 $\boldsymbol{j}_1$ に対して電場が仕事を行う。これを δW_1 としよう。δW_1 は正にも負にもなりうる。$\boldsymbol{j}_1$ に対して仕事が行われれば電子は加速又は減速され $\boldsymbol{j}_1$ は増加又は減少する。従って U_{1D} は変化し，変化量は δW_1 に等しい。[7] $\delta W_1 = \delta U_{1D}$。時間が十分たつと境界領域は無限遠にとび去り，$\boldsymbol{H}_2 + \delta \boldsymbol{H}_2$ が全空間を満たす。このときの磁場のエネルギーは(15)を用いてよい。但し $\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{A}$ 共に新しいもの（$\boldsymbol{j}_2 + \delta \boldsymbol{j}_2$ に対応するもの）を用いる。旧い(15)との差を δU_m と書く。境界領域には横波の電磁波のようなものが存在し，それが無限遠にエネルギーを持去る。これを U_R とする。U_R は常に正である。この時点におけるエネルギー保存から

$$\delta Q = \delta U_{2D} + \delta U_{2T} + \delta W_1 + \delta U_m + U_R \tag{17}$$

がえられ，(16)から

$$\delta U_{EM} = \delta W_1 + \delta U_m + U_R - \delta U_{m2} \tag{18}$$

をうる。これで新しい定常状態への転移が完了した。

そこでエントロピー変化を考える。まず $\delta Q = -T \delta S_r$。すでにのべたように U_{2T}

は C_2 電子ガスの内部エネルギーであるから，$\delta U_{2T}=T\delta S_2-p_2 dV_2$ が成立つが $dV_2=0$ だから $\delta U_{2T}=T\delta S_2$。そうすると(17)は

$$U_R+T\delta(S_r+S_2)=-\delta U_{2D}-\delta U_m-\delta W_1 \tag{19}$$

となる。ここで次の量を導入するのが便利である。

$$U'_m\equiv U_m-U_{m2}=U_m-(2c)^{-1}\int \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r})\,dV \tag{20}$$

$$U'_{2D}\equiv U_{2D}+U_{m2}=U_{2D}+(2c)^{-1}\int \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r})\,dV \tag{21}$$

U'_{2D} は $\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r})$ にのみ依存し，C_2 の G–L 的エネルギーである。U'_m は磁気エネルギーのうちで C_1 の作る磁場と $\boldsymbol{j}_2$ との相互作用という，我々の問題に本質的な部分を含む。すると(19)は

$$U_R+T\delta(S_r+S_2)=-\delta U'_{2D}-\delta U'_m-\delta W_1 \tag{22}$$

となる。ところが飯田氏によって $\delta U'_m+\delta W_1=0$ が示されている。（これは Appendix I で示したことと同じ内容である）従って

$$U_R+T\delta(S_r+S_2)=-\delta U'_{2D} \tag{23}$$

さて U_R は正であり，エントロピー増大則を考えると(23)の右辺は正でなければならない。或は C_1 と C_2 全体を黒体壁で囲んであると考えれば U_R は熱になってしまってそこにエントロピー増加がある。全エントロピー増大から

$$\delta U'_{2D}\leqq 0 \tag{24}$$

がえられる。これが系の進む方向を与える式であって，熱力学の第二法則に基いている。これ以外の結果は第二法則に違反するといわねばならぬ。U'_{2D} は外部磁場のないときの C_2 の G–L 的エネルギーであり，熱平衡ではそれを最小にせよというのであるから，$\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r})=0$ がその答である。これは Miss van Leeuwen の定理に外ならない。

さて飯田氏は $U_R+\delta W_1$ を T. E. と考える。なぜそうされるのか実は理由がよく判らない。$\delta\boldsymbol{j}_2$ の変化が終了した直後電磁波のエネルギーとなって飛んで行くのは δU_{EM} で

あって，これをT．E．とするなら一応理解出来る。δU_{EM}は(18)によって$U_R+\delta W_1+\delta U'_m=U_R$である。これをT．E．としてT．E．原理を適用すれば(23)より再び(24)をうる。しかしともかく$U_R+\delta W_1$をT．E．としT．E．原理を適用するなら(19)より

$$\delta U_{2D}+\delta U_m \leqq 0 \tag{25}$$

が得られる。つまり熱平衡では$U_{2D}+U_m$を極小にせよということである。これは§1の(4)において第二項と第三項の和を極小にせよということと同じである。そこで述べたようにそれからロンドン方程式が得られる。勿論この結果は(24)と異るから飯田理論は熱力学の第二法則に違反するということが出来る。[8)]

§1で述べたように$U_{2D}+U_m$を極小にせよということは直観に訴えるものをもっている。しかしU_mを減らすように$\boldsymbol{j}_2$を流したとき，減ったエネルギーは熱浴に行かないでU_{1D}を変化させるだけである。熱浴に行くのならそこにエントロピーの増大があるからよい。しかしそうではないので，$\boldsymbol{j}_2$を作ることによるエントロピーの減少のため第二法則に違反するのである。

飯田氏はC_2に表面反磁性電流が流れた状態がkinematicalに安定だという議論をしておられる。§1の例に戻っていうならば，I_1を0からI_1まで増大させたとき電磁誘導によって(5)の値の反磁性電流I_2が流れる。もしC_2に一切のマサツがなく，またBr-emsstrahlungのような電磁輻射も非常に遅いとすれば，準平衡状態として反磁性電流が保たれることはあるだろう。ところが飯田氏は一歩進んで，反磁性電流が流れていなくてC_2内に外部磁場が侵透している状態から出発しても，反磁性電流が流れ出す（マイスナー効果）と主張しておられる。電流が流れ出せば$\delta U'_{2D}$は正である。従って(23)から（U_Rも正である）$\delta(S_r+S_2)$が負でなければならない。つまり全エントロピーが減少する。故に「古典電子ガスはマイスナー効果を示す」という主張は第二法則に違反する。

§4. 磁場中の電子のハミルトニアン

さて Miss van Leeuwen の定理の証明として van Vleck の本などにあるハミルトニアンを用いる方法と，ここに述べた方法との関連についてコメントしておこう。今迄の議論で大切なことは，$\boldsymbol{j}_2$が変化したとき磁気エネルギーの変化がC_1の運動エネルギー

に転化するということであった。通常磁場中の電子ハミルトニアンとして書かれているものの中には，この同じ事情がすでに取込まれているのである。

このことをみるために磁場中の一コの電子を考える。磁場を作るC_1として，§3で述べた重い輪を考えよう。その質量をM_1，速度をV_1とする。電子の速度を$\boldsymbol{v}_2$とする。この系のエネルギーは

$$U = M_1 V_1^2/2 + m\boldsymbol{v}_2^2/2 + \alpha V_1(\boldsymbol{r}_2 \times \hat{\boldsymbol{z}}) \cdot \boldsymbol{v}_2 \tag{26}$$

である。これは(4)に丁度対応する。第三項は電子の電流と輪の電流との相互作用であり，(4)の第三項に対応する。$\hat{\boldsymbol{z}}$は輪の作る磁場の方向，$\boldsymbol{r}_2$は電子の位置ベクトルでC_1及C_2の共通の中心より測る。磁場の大きさH_1はV_1に比例する。両者の間には

$$\alpha V_1 = eH_1/2c \tag{27}$$

という関係がある。

さて(26)で与えられる系はどのような運動をするか。ラグランジュの運動方程式を立ててみる。ラグランジュアンは(26)そのものである（運動エネルギーだけであるから）。そこでまず

$$\boldsymbol{p}_2 \equiv \partial L/\partial \boldsymbol{v}_2 = m\boldsymbol{v}_2 + \alpha V_1(\boldsymbol{r}_2 \times \hat{\boldsymbol{z}}) \tag{28}$$

となり，これから$\dot{\boldsymbol{p}}_2 = \partial L/\partial \boldsymbol{r}_2$は丁度ローレンツ力で運動する電子の方程式になっている。次に輪について考える。

$$P_1 \equiv \partial L/\partial V_1 = MV_1 + \alpha(\boldsymbol{r}_2 \times \hat{\boldsymbol{z}}) \cdot \boldsymbol{v}_2 \tag{29}$$

$$\dot{P}_1 = \partial L/\partial R_1 = 0 \tag{30}$$

(30)からP_1は運動の恒量である。従って(29)から

$$\delta V_1 = -\alpha(\boldsymbol{r}_2 \times \hat{\boldsymbol{z}}) \cdot \delta \boldsymbol{v}_2/M_1 \tag{31}$$

が得られる。つまり電子の速度が変化すればそれに伴って輪の速度も変らなくてはならない。いわば輪は電子の反動をうけるといってよい。(31)では$\delta \boldsymbol{v}_2$が起これば直ちにδV_1が起るが，光速が有限であるから実際には retardation がある。それを無視して何らさ

しつかえないことはすでにみた通りである。さて(31)の関係があると(26)の第一項と第二項の和の変化は0であることがすぐ判る（M_1^{-1} の量を省略して）。ハミルトニアンを作ってみるとこの点がいっそうはっきりする。$H=\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{v}_2+P_1V_1-L$ を計算すると(26)と全く等しくなることが判る。しかしハミルトニアンは V_1，$\boldsymbol{v}_2$ の代りに P_1，$\boldsymbol{p}_2$ で表わさなくてはならない。(29)によって V_1 を P_1 で表わして(26)に代入すると

$$H=m\boldsymbol{v}_2^2/2+P_1^2/2M_1 \tag{32}$$

となる。但し M_1^{-1} の量を省略した。(26)と(32)は同じであって，両者を比較すると(26)の磁気エネルギーと輪の運動エネルギーの和が一定であることが一目瞭然である。通常(32)の第一項のみとり，$\boldsymbol{v}_2$ として(28)を用いて $\boldsymbol{p}_2$ で表わしたものが磁場中の電子ハミルトニアンといわれている。

$$\begin{aligned} H' &= [\boldsymbol{p}-eH_1(\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{z}})/2c]^2/2m \\ &= \boldsymbol{p}^2/2m-\mu_B l_z H_1+e^2H_1^2(x^2+y^2)/8mc^2 \end{aligned} \tag{33}$$

但し添字2を省略した。この第二，三項が電子と磁場との相互作用とされている。それは今まで磁気エネルギーと呼んでいた(26)の第三項とは別のものである。後者は(32)の第二項に含まれている。

磁気エネルギーは(3)において $+\mu_2H_1$ と表わした。それと(33)の第二項とを較べてみると符号が逆であることが判る。(33)の意味する所は，l_z を変化させた時磁場の源まで含めた全系のエネルギーの変化が $\delta(-\mu_B l_z H_1)$ で与えられるということである。このことは飯田氏も注意しておられるが，[9] 実はよく知られたことである。このように正しい答が出て来たのはとりもなおさず，電子のハミルトニアンが(33)だけで表わされるということの中に磁場の源が電子の反動をうけるという事情がとりこまれているからである。さて(32)又は(33)から電子の速度が v_2 である確率と $-v_2$ である確率とは等して。つまり電流の平均は0であって，Miss van Leeuwen の定理が成立つ。[10]

蛇足をもう一つ。磁場を作る C_1 が非常な遠方にあるとすると問題は簡単になる。C_2 内の電子が熱平衡に達するのに要する時間を仮に秒の程度とする。もし C_1 が C_2 より1光年の彼方にあったらどうだろうか。このときは確かに retardation が問題となる。このときは前節の δW_1 が存在しないことは確かである。我々は(19)の右辺が正という条件を

課したが $\delta W_1=0$ ならそれは(25)となって飯田氏の条件になるではないか。しかしこのとき $\delta U'_{\mathrm{m}}$ も0になる。(Appendix II) 従って(22)の右辺において $\delta U'_{\mathrm{m}}+\delta W_1=0$ が成立ち，再び(24)が得られる。この場合は磁場の源が電子の反動をうけることもない代りに，（飯田氏の問題とした）磁気相互作用のエネルギーも存在しない。通常の教科書はこの場合を想定して書かれていると思ってよいであろう。教科書には次のように書いてある。

一定磁場の中を運動する電子はローレンツ力を受ける。それを記述するラグランジュアンは

$$L=m\boldsymbol{v}^2/2+(eH_1/2c)(\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{z}})\cdot\boldsymbol{v} \tag{36}$$

であり，ハミルトニアンは

$$H=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}-L=m\boldsymbol{v}^2/2=(33) \tag{37}$$

である。

磁気エネルギーが存在しないので運動エネルギー以外考えるべきエネルギーは存在しない。従ってハミルトニアンは全エネルギーに等しい。この場合には磁気エネルギーの変化が C_1 の運動エネルギーに転化する（$\delta U'_{\mathrm{m}}=-\delta U_{1\mathrm{D}}$）などということをいちいち考える必要はなく，電子の運動エネルギーのみを問題にすればよい。そしてそれから直ちに Miss van Leeuwen の定理が導かれる。

Appendix I

I_2 が δI_2 だけ変化したとする。その時間経過が $\delta I_2(t)$ と表わされるとする。$\delta I_2(-\infty)=0$，$\delta I_2(+\infty)=\delta I_2$。$\delta I_2(t)$ によって生じる電磁場を $\boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{r},t)$ とする。$\boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{r},-\infty)=\boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{r},-\infty)=\boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{r},+\infty)=0$，$\boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{r},+\infty)=\delta\boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{r})$とする。$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{e}_2=-c^{-1}\partial\boldsymbol{h}_2/\partial t$ を C_1の囲む面積について積分する。C_1 は十分細いとする。

$$\int_{C_1} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{e}_2 \cdot d S_1 = -c^{-1}\, \partial/\partial t \int_{C_1} \boldsymbol{h}_2 \cdot d\boldsymbol{S}_1$$

$$\int_{C_1} \boldsymbol{e}_2 \cdot d\boldsymbol{r} = -c^{-1}\, \partial \Phi_{12}/\partial t$$

Φ_{12} は I_2 に起因する C_1 内のフラックスである。両辺に $I_1\, d\, t$ をかけると左辺は $d\, t$ 間に $\boldsymbol{e}_2$ が I_1 になした仕事になる。t について $-\infty$ から $+\infty$ まで積分すれば左辺は $\boldsymbol{e}_2$ が I_1 に対してなした仕事の総量である。右辺は $-c^{-1} I_1\, \delta\Phi_{12}$ となる。$\delta\Phi_{12}$ は δH_2 が C_1 内に作るフラックスである。

さて磁気エネルギー(2)は(3)と同様に計算して

$$(I_1/c) \int_{C_1} \boldsymbol{A}_2 \cdot d\ell_1 = (I_1/c) \int_{C_1} \boldsymbol{H}_2 \cdot d\boldsymbol{S}_1 = (I_1/c)\, \Phi_{12}$$

と書くことが出来る。従って磁気的相互作用のエネルギーの減少が $\boldsymbol{e}_2$ が I_1 になした仕事に等しいことが証明された。

Appendix II

U'_{m} のうち問題になるのは $\boldsymbol{j}_1$ と $\boldsymbol{j}_2$ の相互作用である。

$$(4\pi)^{-1} \int \boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{r})\, d\, v \qquad (\mathrm{A.1})$$

という項である。$\boldsymbol{H}_2$ は $\boldsymbol{j}_2$ の作る磁場であるが $\boldsymbol{j}_2$ は遙かな過去から流れていたのではない，せいぜい一秒前から流れているのである。そうするとその作る磁場 H_2 は一秒間に光の進む距離位の範囲内にしか存在しない。従って，（A.1）の積分範囲は∞ではなく上の範囲内で行えばよい。ところがその範囲内では H_1 は一様とみなしてよい。なぜならその範囲は C_1 の大きさに較べてはるかに小さいから。さて $\boldsymbol{j}_2$ を微小の $d\boldsymbol{j}_2$ に分け，それの作る磁場を $dH_2(\boldsymbol{r})$ とする。ビオサバール則により $dH_2(\boldsymbol{r})$ は奇関数であり，また H_1 は一様である。従って，$\int \boldsymbol{H}_1 \cdot d\boldsymbol{H}_2\, d\, v$ は 0 である。従って（A.1）も 0 である。従って $\delta U'_{\mathrm{m}}$ も 0 である。

文　献　及　び　註

1）S. Iida, 物性研究 **28** (1977), 45. 及びそこの文献。

2）飯田修一「新電磁気学（上・下）」丸善

3）例えばランダウリフシッツ「Electrodynamics of Continuous Media」

4）似た問題で印象的な図がバークレイコース「電磁気学」丸善 201, 202 頁にある。

5）これは実は正しくない。(4)の第三項が負から 0 になるのは も少し後である。この点は § 3で詳しくのべる。

6）エネルギー保存から当然 $Mg\,\varDelta x$ だけの弾性エネルギーが伝播して行くと思わなくてはならない。

7）$\boldsymbol{j}_1$ に対してなされた仕事が U_{1D} のみならず U_{1T} も変化させないかという疑問が生じるかも知れない。その時は C_1 としてはじめに述べたような電荷を帯びた重い輪を考えればよい。このとき U_{1T} は存在しないから，δW_1 は輪の運動エネルギー即ち U_{1D} に転化するしかない。

8）ここでみたように T. E. 原理はよいが，δW_1 を T. E. に加えた点が誤りであったといった方が正しいかもしれぬ。δW_1 はすでにのべたように U_{1D} に転化するから配位空間で表わせるエネルギーに転化するわけで T. E. とはいえない。これを T. E. とみなしたことはそれが熱になってエントロピーの増大に寄与するとしたことと同じで，そのため第二法則に違反しないように見える。文献1）の（127）式で $U_R + \delta W_1 =$ heat radiated としてあり，熱にならないものを熱とした点で明白な誤りである。

9）前掲書の補 13 頁。

10）ここでは電子間の磁気相互作用エネルギーを考慮しなかったが，それを考慮しても同定理が成立つことを示すことが出来る。